

Όνοματεπώνυμο:

Αριθμός Μητρώου:

123. Θεωρία Αριθμών  
Εξέταση Παρασκευής 27 Ιανουαρίου 2023  
2 ώρες και 45 λεπτά

- (0.5 μονάδες) Αν  $z = 4 - 4i$  να υπολογίσετε τον μιγαδικό  $z^{2023}$ .
- (0.5 μονάδες) Να λύσετε, για  $z$  μιγαδικό, την εξίσωση  $z^2 - 5z + 12 = 0$ .
- (1 μονάδα) Να λύσετε, για  $z$  μιγαδικό, την εξίσωση  $z^3 = i$ .
- (0.5 μονάδες) Χρησιμοποιώντας την αρχή της μαθηματικής επαγωγής να δείξετε ότι ο αριθμός 7 διαιρεί τον αριθμό  $5^{2n} - 4^n$  για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ .
- (0.5 μονάδες) Να δοθεί η αναπαράσταση των δεκαδικών αριθμών 48 και 16 στο δυαδικό σύστημα.
- (1.5 μονάδες) Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης του Euler  $\varphi(-)$ .  
Να βρεθεί το  $\varphi(11)$ .  
Να δείξετε ότι το 11 δεν διαιρεί τον φυσικό  $n^2 + 1$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .
- (1 μονάδα) Να αναφέρετε το Θεώρημα του Wilson.  
Αν ο πρώτος  $p$  έχει τη μορφή  $p = 4k + 1$ , να δείξετε ότι  $((2k)!)^2 \equiv -1 \pmod{p}$ .
- (1.5 μονάδες) Να βρεθεί ακέραιος  $m$  ώστε η Διοφαντική εξίσωση
$$3x + 2y = m$$
να έχει ακριβώς δύο θετικές λύσεις.
- α) (0.5 μονάδες) Αποδείξτε ότι το 3 είναι (πρωτ-)αρχική ρίζα modulo 50.  
β) (1 μονάδα) Υπολογίστε όλους τους ακέραιους μεταξύ 1 και 50 που είναι (πρωτ-)αρχικές ρίζες modulo 50.  
γ) (0.5 μονάδες) Υπολογίστε όλους τους ακέραιους  $k$  μεταξύ του 1 και του 45 για τους οποίους  $\text{ord}_{50}(9^k) = 5$ .
- (2 μονάδες) Να εξετασθεί αν έχει λύση και να λυθεί το σύστημα στους ακεραίους
$$\begin{aligned}2x &\equiv -1 \pmod{5} \\ x &\equiv 3 \pmod{4} \\ 2x &\equiv 2 \pmod{3}.\end{aligned}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ